CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2001

Filière PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I

Durée : 3 heures
Calculatrices autorisées

L'épreuve comporte deux problèmes, 1 et 2, totalement indépendants.

PROBLEME 1

Soit 3 fonctions a, b, c appartenant à $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

Soit α et β deux nombres réels.

On note (P) le problème suivant:

« Trouver f appartenant à $C^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que :

$\forall x \in [0,1]$ $f''(x) = a(x)f(x) + b(x)f'(x) + c(x)$ avec $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$ »

Partie A

A-1) Justifier l'existence et l'unicité de g appartenant à $C^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que:

$\forall x \in [0,1]$ $g''(x) = a(x)g(x) + b(x)g'(x)$ avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$

et l'existence et l'unicité de h appartenant à $C^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que:

$\forall x \in [0,1]$ $h''(x) = a(x)h(x) + b(x)h'(x) + c(x)$ avec $h(0) = \alpha$ et $h'(0) = 0$.

A-2) Montrer que si f est solution de (P) alors il existe λ appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $f = h + \lambda g$.

A-3) Montrer alors que si g(1) est différent de 0, (P) admet une unique solution.

A-4) Soit l'équation (E) définie par:

$\forall x \in [0,1]$ $y''(x) = -(1+\pi^2)y(x) + 2y'(x) + x$

A-4-a) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) (on détaillera les calculs).

A-4-b) Existe-t-il des solutions y de (E) telles que $y(0) = 1$ et $y(1) = 2$?

Partie B

B-1) Soit f appartenant à $C^1([0,1],\mathbb{R})$ avec $f(0) = f(1) = 0$.

B-1-a) Montrer qu'il existe une fonction q continue sur $[0,1]$ telle que pour tout x appartenant à $]0,1[$:

$$q(x) = \frac{f(x)}{\sin(\pi x)}$$

B-1-b) On suppose dans cette question que q appartient à $C^1([0,1],\mathbb{R})$

B-1-b-1) Calculer $\int_0^1 q(x)q'(x)\sin(2\pi x)dx$ en fonction de $\int_0^1 [q(x)]^2\cos(2\pi x)dx$

Tournez la page S.V.P.

B-1-b-2) Montrer alors que:

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 [f(x)]^2 dx$$

B-1-c) Montrer que l'inégalité précédente reste vraie si q n'appartient pas à $C^1([0,1],\mathbb{R})$.

B-2) On suppose dans cette question que pour tout x appartenant à $[0,1]$ b(x) = 0 et que pour tout x appartenant à $[0,1]$ a(x) > $-\pi^2$

Montrer alors que le problème (P) admet une unique solution .

(on considèrera $\int_0^1 g''(x)g(x)dx$ et on intègrera par parties, g étant la fonction définie au A-1)

PROBLEME 2

Les deux parties, A et B, du problème 2 sont indépendantes.

Partie A

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.
Pour f appartenant à E, on pose:

$\|f\| = \left[\int_{\mathbb{R}} [f(x)]^2 dx\right]^{1/2}$ et on définit g par $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et g(0) = f(0)

(on rappelle que $f \to \|f\|$ est une norme sur E).

A-1) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$

A-2) Montrer que:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_0^x g^2(t)dt = 2\int_0^x f(t)g(t)dt + P(x)\,g^2(x)$$

où P(x) est un polynôme en x à déterminer.

A-3)

A-3-a) Déduire de la question précédente que pour $x \geq 0$:

$$\left[\int_0^x g^2(t)dt\right]^{1/2} \leq 2\left[\int_0^{+\infty} f^2(t)dt\right]^{1/2}$$

A-3-b) Montrer que g appartient à E et que $\|g\| \leq 2\|f\|$

A-4) On note T l'application de E dans E définie par T(f) = g.

Pour tout α positif on définit f_α par $f_\alpha(x) = \text{Inf}\,(1, |x|^{-\alpha})$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f_\alpha(0) = 1$

A-4-a) Pour quelles valeurs de α f_α appartient-elle à E?

A-4-b) Pour ces valeurs calculer $\|f_\alpha\|$

A-4-c) Calculer $\|T(f_\alpha)\|$

A-4-d) On note $|||\ T\ |||$ la borne supérieure de l'ensemble $\left\{ \frac{\|T(f)\|}{\|f\|}, f \in E, f \neq 0 \right\}$. Calculer $|||\ T\ |||$.

Partie B

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série de terme général $u_n{}^2$ converge, c'est à dire telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n{}^2 < +\infty$

On pose :

$$v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}$$

et pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1}$

$$\Delta a_n = a_n - a_{n-1} \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } \Delta a_1 = a_1$$

B-1) Calculer $v_n{}^2 + \Delta(n\, v_n{}^2) + (n-1)(\Delta v_n)^2$ en fonction de u_n, v_n, v_{n-1} puis en fonction de u_n et v_n.

B-2) En déduire que

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n{}^2 \right)^{1/2} \leq 2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n{}^2 \right)^{1/2}$$

Fin de l'énoncé